FISICA.NET
O CANAL DA FÍSICA NA INTERNET

# Noções de Cálculo Vetorial
Prof. Alberto Ricardo Präss

## ***Linguagem e conceitos***

Linguagem é um ingrediente essencial do pensamento abstrato. É difícil pensar clara e facilmente sobre conceitos sofisticados e abstratos, numa linguagem que não tem palavras apropriadas a tais conceitos. Para exprimir novos conceitos científicos novas palavras são inventadas e adicionadas às línguas.
Um vetor é uma quantidade que tem direção e sentido além de magnitude.

## ***Notação Vetorial***

Uma vez que símbolos são os componentes da linguagem matemática, uma parte importante da arte da análise matemática é a técnica de usar uma boa notação. A notação vetorial tem duas grandes propriedades:

1. A formulação de uma lei física em termos de vetores é independente da escolha dos eixos de coordenadas. A notação vetorial oferece uma linguagem na qual enunciados têm um conteúdo físico independente do sistema de coordenadas.
2. A notação vetorial é concisa. Muitas leis físicas têm formas simples e transparentes, que são pouco aparentes quando estas leis são escritas em termos de um sistema particular de coordenadas.

Algumas das leis mais complicadas, que não podem ser expressas em forma vetorial, podem ser expressas em termos de tensores. Um tensor é uma generalização de um vetor e inclui um vetor como um caso especial. A análise vetorial que conhecemos hoje é em grande parte o resultado do trabalho feito no fim do século XIX por Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside.

A notação vetorial que adotamos é a seguinte: $\vec{A}$.

A utilidade e aplicabilidade de vetores em problemas físicos é baseada, em parte, na geometria Euclidiana. O enunciado de uma lei em termos de vetores usualmente acarreta a hipótese de que a geometria de Euclides é válida. Se a geometria não for Euclidiana, a adição de dois vetores de uma forma simples e inequívoca pode não ser possível. Para o espaço curvo existe uma linguagem mais geral, a geometria diferencial métrica, que é a linguagem da Teoria da Relatividade Geral, domínio da Física no qual a geometria Euclidiana não é mais válida.

Consideramos um vetor como sendo uma grandeza tendo direção, sentido e intensidade. Esta propriedade não tem nenhuma relação com um sistema particular de referência[1]. Um escalar é definido como sendo uma quantidade cujo valor não depende do sistema de coordenadas. O módulo de um vetor é um escalar.

As principais grandezas físicas e a sua classificação como escalar ou vetorial são:

| **Grandezas Escalares** | | | **Grandezas Vetoriais** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Grandeza | Símbolo | Unidade | Grandeza | Símbolo | Unidade |
| Comprimento | L | m | Posição | $\vec{x}$ | m |
| Área | A | $m^2$ | Deslocamento | $D\vec{x}$ | m |
| Volume | V | $m^3$ | Velocidade | $\vec{v}$ | m/s |
| Massa | m | kg | Aceleração | $\vec{a}$ | $m/s^2$ |
| Pressão | p | Pa | Força | $\vec{F}$ | N |
| Densidade | d | $kg/m^3$ | Momentum | $\vec{Q}$ | N.kg/s |
| Tempo | t | s | Impulso | $\vec{I}$ | N.s |
| Temperatura | T | K | Campo Elétrico | $\vec{E}$ | V/m |
| Energia | E | J | Campo Magnético | $\vec{B}$ | T |
| Potência | P | W | | | |
| Corrente Elétrica | i | A | | | |
| Potencial Elétrico | V | V | | | |
| Resistência Elétrica | R | Ω | | | |
| Resistividade Elétrica | ρ | Ω.m | | | |

## ***Igualdade de vetores***

Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são definidos como sendo iguais se tiverem o mesmo módulo, direção e sentido. Um vetor não tem, necessariamente, uma localização, apesar de que um vetor possa se referir a uma quantidade definida em um ponto. Dois vetores podem ser comparados, mesmo que meçam quantidades físicas definidas, em diferentes pontos do espaço e de tempo.

## ***Operações com Vetores***

Vamos estudar agora a maneira de operar com as grandezas físicas vetoriais (ou com vetores). Já estamos bastante familiarizados em somar ou subtrair grandezas escalares de uma mesma espécie:

a) assim, a adição de um comprimento de 20 m de tecido com 40 m de outro nos fornece cerca de 20 m + 40 m = 60 m;
b) b) um volume de 5 litros somado com um outro de 10 litros nos fornece um volume resultante de 15 litros;
c) se subtrairmos 4 horas, de um intervalo de tempo de 15 horas, obteremos 15 h – 4 h = 11 h;

d) já a operação 10 litros + 2 horas não é possível ser efetuada visto tratar-se de grandezas de espécies diferentes.

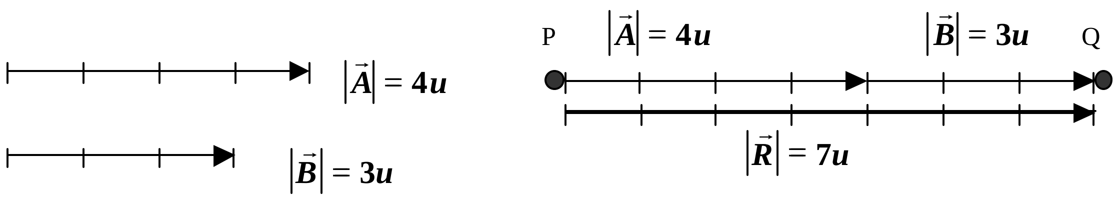
E com os vetores, de que forma podemos operar? Existem métodos gráficos e analíticos. Veremos os métodos gráficos.

***<u>Adição de Vetores[2]</u>***

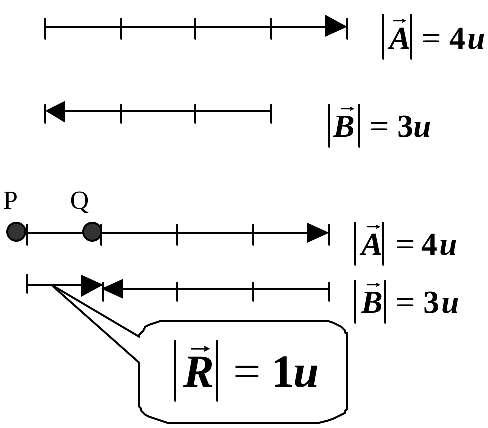
O vetor resultante ou soma $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ é obtido da seguinte maneira:

a) escolhe-se um ponto qualquer (ponto P).
b) desloca-se em qualquer ordem todos os vetores que se deseja somar de modo que a origem do primeiro fique sobre o ponto P e os demais fiquem dispostos de tal forma que a origem de um coincida com o vértice de outro.
c) o vetor que vai da origem do primeiro (ponto P) à extremidade do último (ponto Q) é, por definição, o vetor resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.

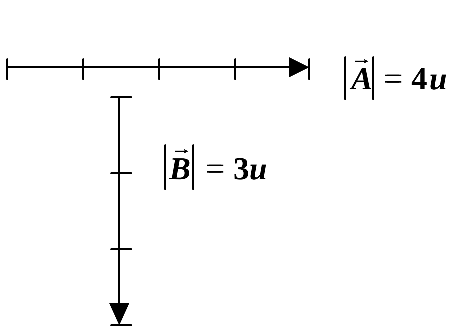
1º Caso: dois vetores de mesma direção e sentido.

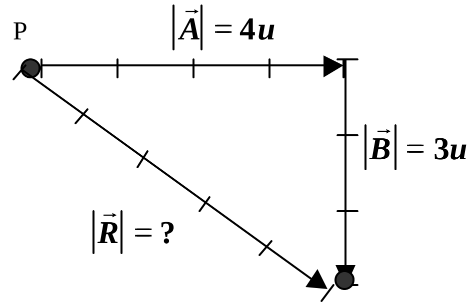



2º Caso: dois vetores de mesma direção e sentidos opostos.

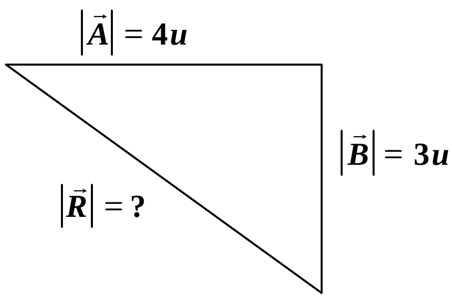



3º Caso: dois vetores de direções perpendiculares.



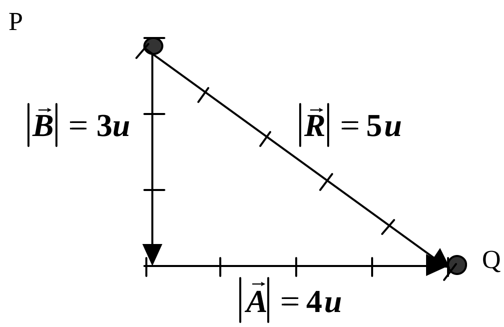




Para achar o módulo do vetor resultante $|\vec{R}|$, usa-se o Teorema de Pitágoras:

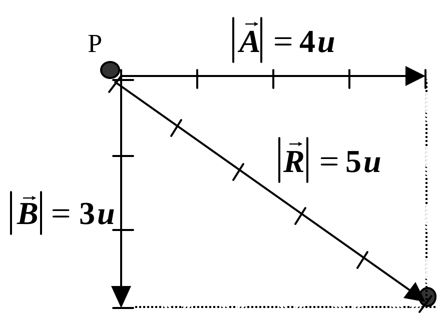



$$|\vec{R}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2$$
$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$$
$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$|\vec{R}| = \sqrt{16 + 9}$$
$$|\vec{R}| = \sqrt{25} \Rightarrow |\vec{R}| = 5u$$

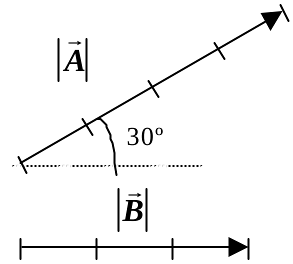
Também estaria correto se ao invés de começar com $\vec{A}$ começássemos com $\vec{B}$:

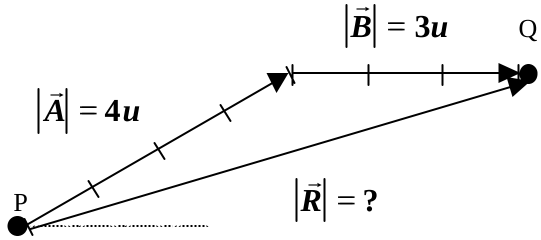



Podemos usar a “Regra do Paralelogramo”.
*Escolhe-se um ponto qualquer (ponto P).
*Coloca-se a origem dos dois vetores nesse ponto.
*Completa-se o paralelogramo usando linhas imaginárias.
*O vetor resultante tem origem no ponto P e tem a mesma direção da diagonal que parte de P.



4º Caso: dois vetores com direções oblíquas.



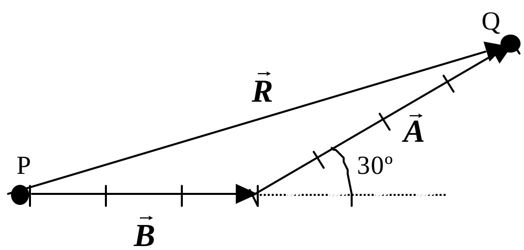

Utilizando-se a Lei dos Cossenos pode-se deduzir que:

$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2.|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos q}$ , onde **q** é o ângulo entre as direções dos dois vetores.

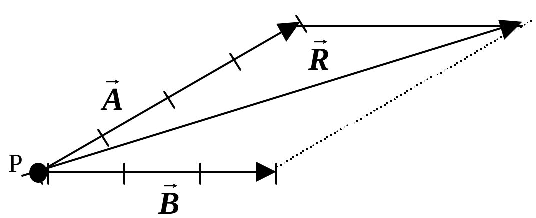
No exemplo em questão temos:

$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2.4.3.\cos 30^o} \rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{16 + 9 + 12\sqrt{3}} \rightarrow |\vec{R}| \cong 6{,}77u$

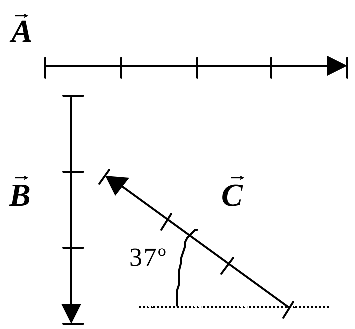
Também estaria correto se ao invés de começar com $\vec{A}$ começássemos com $\vec{B}$:

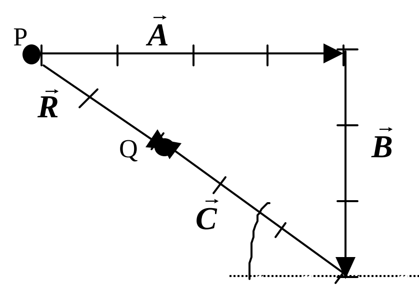



Poderíamos usar a “Regra do Paralelogramo”.



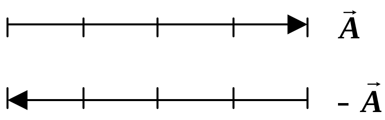

5º Caso: vários vetores com direções quaisquer.



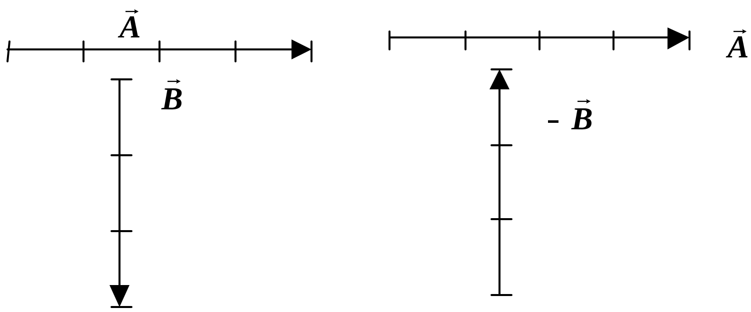



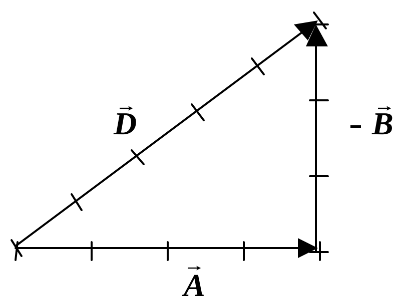
## ***Subtração de Vetores***

Seja o vetor $\vec{A}$chamamos de vetor oposto $-\vec{A}$ a um vetor de mesmo módulo, direção e sentido oposto.



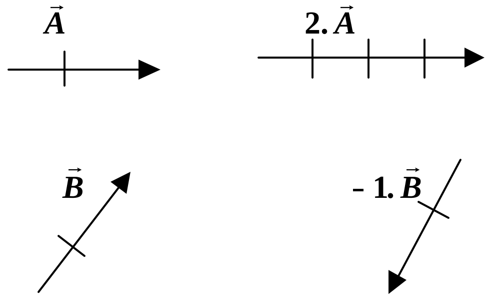

Exemplo:
Dados os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ , o vetor diferença $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ é obtido fazendo-se a adição de $\vec{A}$ com $-\vec{B}$, ou seja: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \Rightarrow \vec{D} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$




## ***Produto de um número real por um vetor***

O produto de um vetor $\vec{A}$ por um número real “n” é um vetor de mesma direção que $\vec{A}$, com o mesmo sentido de $\vec{A}$ se “n” for positivo e sentido contrário ao de $\vec{A}$ se “n” for negativo. Seu módulo é $n.\left|\vec{A}\right|$.
Exemplos:




## ***Produto escalar de dois vetores***

Definição:

O produto escalar de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é definido como uma grandeza “escalar” que é obtida tomando o produto do módulo de $\vec{A}$ pelo de $\vec{B}$, vezes o cosseno do ângulo entre eles:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta$$

onde $\theta$ é o ângulo entre os dois vetores.
Lemos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como " $\vec{A}$ ponto $\vec{B}$ " .
O exemplo mais importante é o cálculo do trabalho $(\tau)$ feito por uma força $(\vec{F})$ ao longo de um deslocamento $(\Delta\vec{x})$:

$$\tau = \vec{F} \bullet \Delta\vec{x} \Rightarrow \tau = |\vec{F}|.|\Delta\vec{x}|.\cos\theta$$

Outro exemplo é o cálculo da potência (P) de uma força $\vec{F}$ quando a velocidade é $(\vec{v})$ :

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v} = |\vec{F}|.|\vec{v}|\cos\theta$$

## ***Produto vetorial de dois vetores***

Definição:

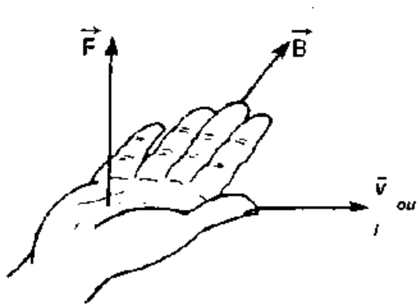
o “produto vetorial” $\vec{A} \times \vec{B}$ é definido como sendo um vetor $(\vec{C})$ perpendicular ao plano que inclui $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e que tem módulo :

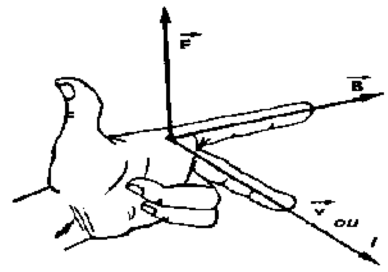
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.|\text{sen}\,\theta|$$

O sentido de $\vec{C}$ é determinado por uma convenção que é a regra do saca-rolhas (também pode-se usar a regra da mão esquerda ou a regra do tapa).

REGRA DO TAPA

REGRA DA MÃO ESQUERDA



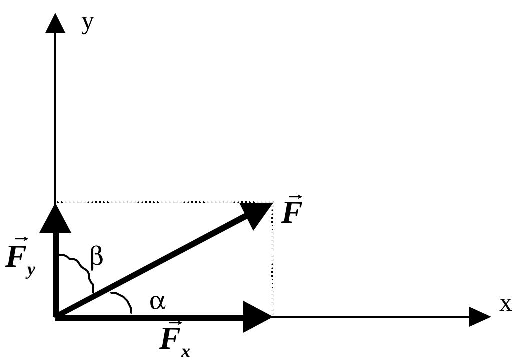




O exemplo mais importante é o da determinação da força ($\vec{F}$) que atua sobre uma carga elétrica (**q**) que se move com uma velocidade ($\vec{v}$) em um campo magnético ($\vec{B}$):

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \left|\vec{F}\right| = |q|.|\vec{v}|.\left|\vec{B}\right|.|sen\ \theta|$$

## ***Decomposição de Vetores***

Seja um vetor $\vec{\boldsymbol{F}}$ inclinado de $\boldsymbol{a}$ em relação ao eixo Ox e inclinado de $\boldsymbol{b}$ em relação ao eixo Oy.




$\vec{F}_x \rightarrow$ componente de $\vec{F}$ segundo Ox

$\vec{F}_y \rightarrow$ componente de $\vec{F}$ segundo Oy

Da figura temos:

$$\textbf{sen}\,\boldsymbol{a} = \frac{\left|\vec{F}_y\right|}{\left|\vec{F}\right|} \qquad \textbf{cos}\,\boldsymbol{a} = \frac{\left|\vec{F}_x\right|}{\left|\vec{F}\right|}$$

$$\textbf{sen}\,\boldsymbol{b} = \frac{\left|\vec{F}_x\right|}{\left|\vec{F}\right|} \qquad \textbf{cos}\,\boldsymbol{b} = \frac{\left|\vec{F}_y\right|}{\left|\vec{F}\right|}$$

Portanto:

$$\left|\vec{F}_x\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos a = \left|\vec{F}\right|.\operatorname{sen} b$$

$$\left|\vec{F}_y\right| = \left|\vec{F}\right|.\cos b = \left|\vec{F}\right|.\operatorname{sen} a$$

OBSERVAÇÕES:

Admitimos que a direção de um vetor pode ser definida. Para algumas finalidades podemos referir a sua direção ao laboratório e para outras às estrelas fixas ou à Terra.

Nem todas as quantidades que tem intensidade e direção são necessariamente vetoriais (por exemplo, corrente elétrica).

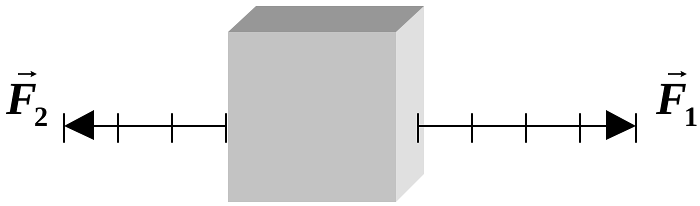
Os valores usados como módulo são apenas para exemplificar. A unidade "u" é arbitrária.

Admitimos que a direção de um vetor pode ser definida. Para algumas finalidades podemos referir a sua direção ao laboratório e para outras às estrelas fixas ou à Terra.

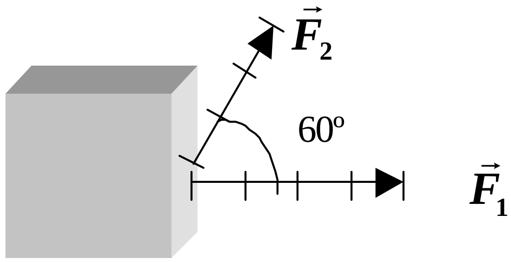
Nem todas as quantidades que tem intensidade e direção são necessariamente vetoriais (por exemplo, corrente elétrica).

***EXERCÍCIOS PROPOSTOS***

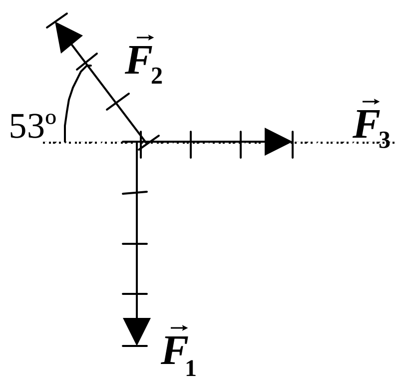
1.Duas forças $|\vec{F}_1| = 40N$ e $|\vec{F}_2| = 30N$ atuam num corpo conforme a figura. Determinar a força resultante $\vec{R}$ (módulo, direção e sentido).



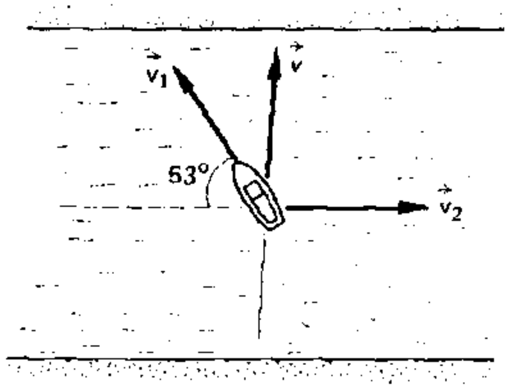

2. Duas forças $|\vec{F}_1| = 40N$ e $|\vec{F}_2| = 30N$ atuam num corpo conforme a figura. Determinar a força única que produz o mesmo efeito que as duas juntas.



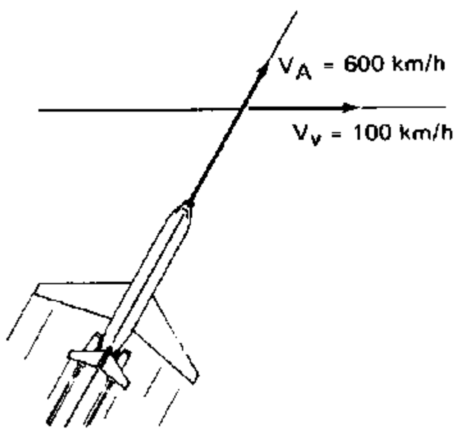

3. Num ponto atuam 3 forças conforme o esquema anexo. Determine a resultante.
$|\vec{F}_1| = 40N, |\vec{F}_2| = 30N, |\vec{F}_3| = 30N$



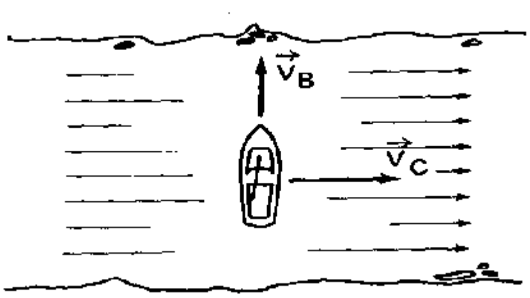

4. Um barco sob a ação do motor fica sujeito a uma velocidade $\vec{v}_1$ ; a correnteza puxa o barco com velocidade $|\vec{v}_2| = 3,0m/s$ rio abaixo. O barco deve cruzar o rio de modo que fique sujeito a uma velocidade $|\vec{v}| = 4,0m/s$ , perpendicular a correnteza. Veja a figura e determine o módulo de $\vec{v}_1$ .



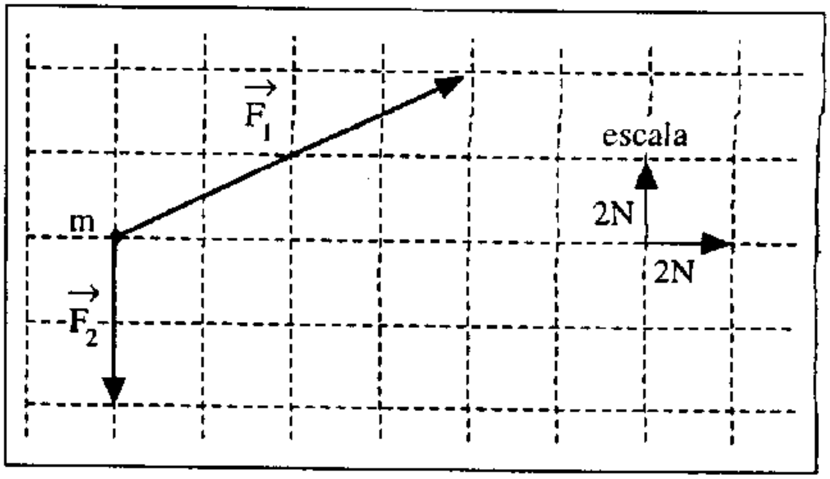

5. Na figura temos um avião voando a 600 km/h. num determinado instante passa a soprar um vento com velocidade de 100 km/h, conforme indica a figura. Determinar a velocidade resultante do avião.




6. Na figura anexa a velocidade do barco é $v_B$=8 m/s dirigida perpendicularmente à correnteza que tem velocidade $v_C$=6 m/s.
Determine a velocidade resultante no barco e o ângulo que esta resultante faz com a correnteza. (Este ângulo é a direção do deslocamento do barco.)

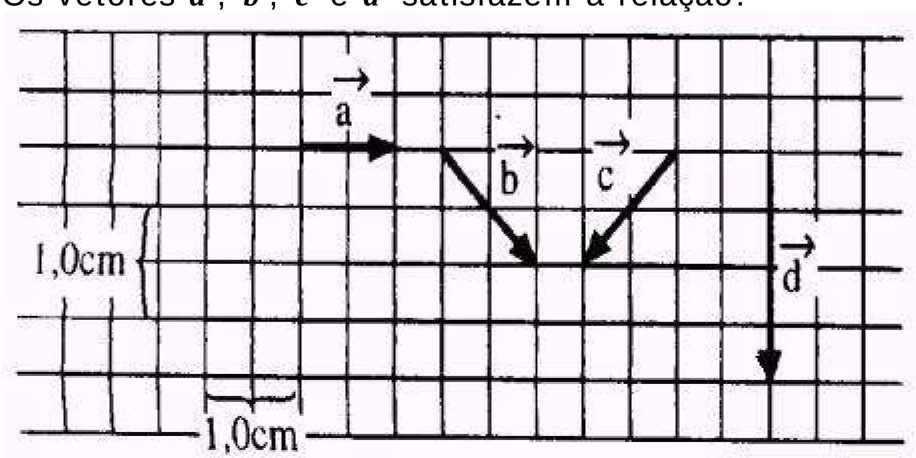



7. O diagrama vetorial mostra, em escala, duas forças atuando num objeto de massa m.



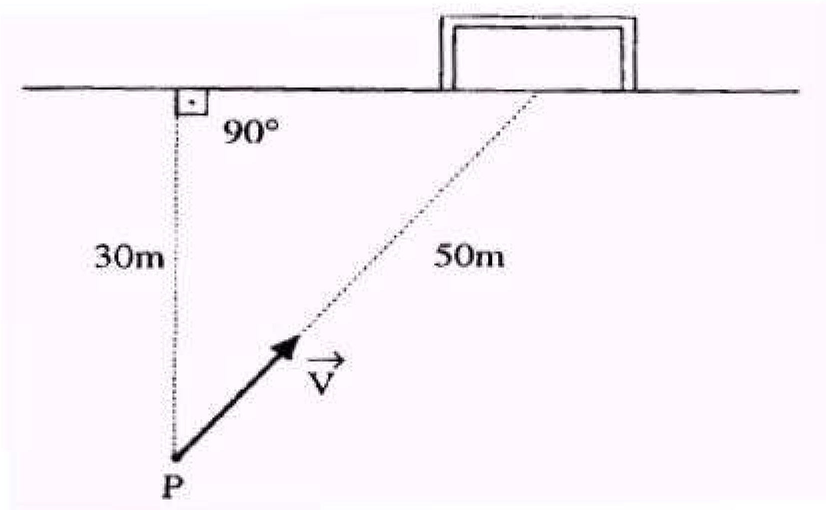

O módulo da resultante dessas forças que estão atuando no objeto é, em newtons:
(A) 2,0
(B) 10
(C) 4,0
(D) 6,0
(E) 8,0

8. Considere os vetores deslocamentos $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ e $\vec{d}$ desenhados a seguir:
Os vetores $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ e $\vec{d}$ satisfazem a relação:



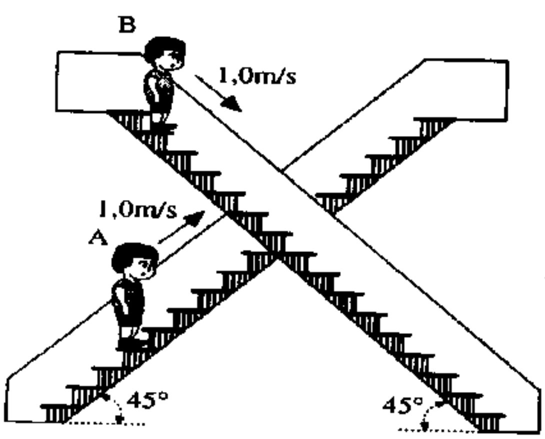

(A) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$
(B) $\vec{b}-\vec{c}=\vec{d}$
(C) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$
(D) $\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$
(E) $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$

9. Um jogador de futebol encontra-se no ponto P, a 50m de distância do centro do gol e a 30m da linha de fundo. Em um dado momento, o jogador avança com uma velocidade de módulo v = 5,0m/s , em direção ao gol. Nesse instante, a velocidade com que ele se aproxima da linha de fundo tem módulo igual a:

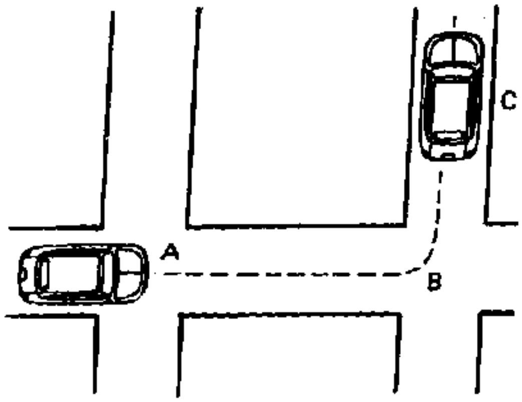



(A) 5,0 m/s
(B) 2,5 m/s
(C) 50 m/s
(D) 3,0 m/s
(E) 30 m/s

10. Dois alunos estão no Shopping Center Bongo. Os alunos A e B estão subindo e descendo, respectivamente, duas escadas rolantes. Cada escada tem velocidade constante de módulo 1,0 m/s e estão inclinadas de 45º em relação à horizontal, conforme indica a figura.

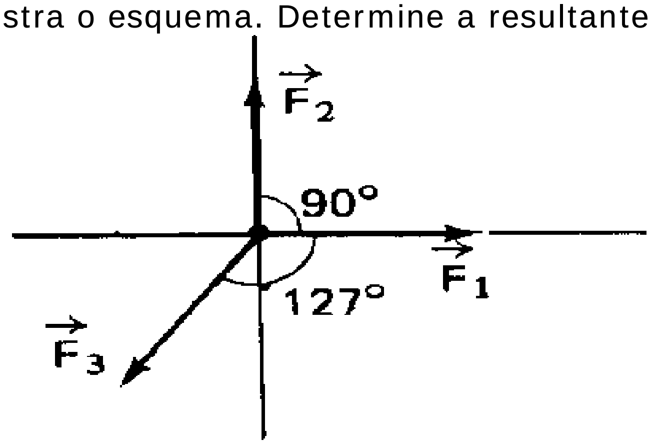



11. A figura representa um carro que percorre a trajetória ABC em 50 s. Sabendo-se que AB = 200 m e BC = 150 m, pede-se:

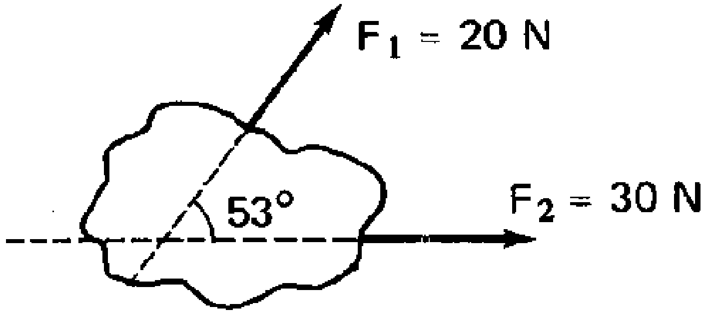



a) representar os vetores deslocamentos correspondentes aos trechos AB e BC e o deslocamento resultante.
b) determine o valor do deslocamento resultante do percurso.
c) determine a velocidade escalar média.
d) determine o módulo da velocidade vetorial média.

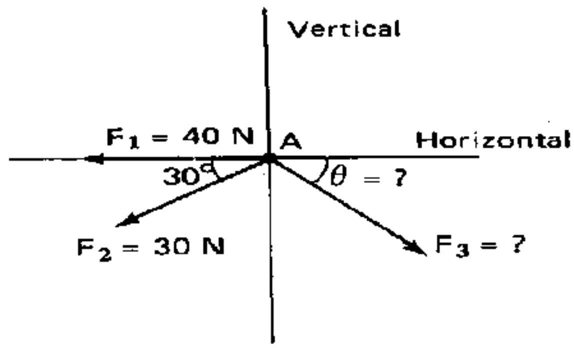
12. Num ponto atuam as forças $F_1$ = 25 N; $F_2$ = 20 N e $F_3$ = 15 N, conforme ilustra o esquema. Determine a resultante delas.



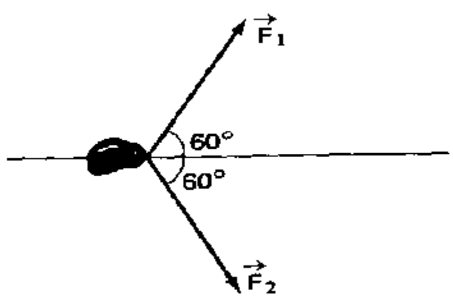

13. Num corpo atuam duas forças conforme o esquema.
Determinar a resultante (módulo, direção e sentido) destas forças.



14. No ponto A atuam as forças indicadas. A resultante deve ser vertical para baixo; e apresentar intensidade R = 15 N.
Determinar o valor de $\vec{F}_3$ e o ângulo θ que ela faz com a horizontal.

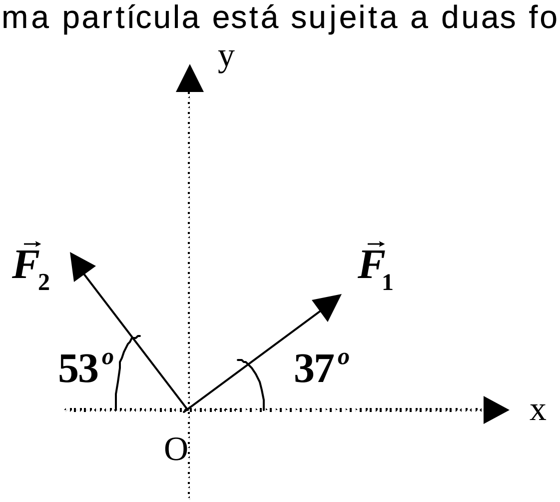



15. Duas forças de intensidade $F_1 = F_2 = 50N$ estão aplicadas num corpo, conforme indica a figura. Determine a força $\vec{F}_3$ que aplicada no corpo torne a resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ nula.




16. Uma pessoa desloca-se 200 m para o norte, em seguida 300 m para leste e finalmente 400 m para o sul. Escolha a escala conveniente e represente os deslocamentos; determine o deslocamento resultante.

17. Uma partícula está sujeita a duas forças, conforme a figura.



Considere sen53º = 0,80; cos 53º = 0,60 e $F_1 = F_2 = 10N$.
Determine:
a) as componentes da força resultante nas direções Ox e Oy.
b) a intensidade da força resultante.

18. No esquema ao lado uma bola atinge uma parede com velocidade $v_1 = 10$ m/s e volta com velocidade $v_2 = 10$ m/s. Determinar a variação de velocidade $D\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , sofrida pela bola nesta interação com a parede.